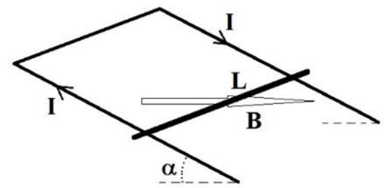
Barem - faza județeană – Clasa a XI-a

Subiectul 1 (electricitate și magnetism)

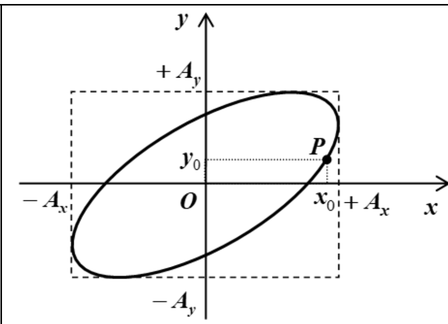
a)	Sub efectul gravitației tija alunecă pe cadru și aria circuitului crește. Apare tensiunea electromotoare indusă în tijă, ε, care generează prin bucla formată curentul de intensitate I cu sensul din figură		0,5	1p
		$\varepsilon = BLv;\ I = \frac{\varepsilon}{R}, I = \frac{Blv\sin\alpha}{R}$	0,5	
b)	Asupra tijei acționează trei forțe: - Forța de greutate: $\vec{G} = m\vec{g}$, orientată vertical în jos. Putem să o descompunem în $G_t = G\sin\alpha$ și $G_n = G\cos\alpha$ - Forța Laplace: $\vec{F} = I\vec{l}x\vec{B}$, orientată vertical în sus. Putem să o descompunem în $F_t = F\sin\alpha = BIl\sin\alpha$ și $F_n = F\cos\alpha = BIl\cos\alpha$. - Normala $\vec{N}$, orientată perpendicular pe planul cadrului.		0,75	3p
	Mișcare rectilinie uniformă:	$a = \frac{dv}{dt} = 0$	0,5	
	Echilibrul forțelor tangențiale:	$0 = G_t - F_t = mg\ sin\alpha - BIl\sin\alpha$	0,5	
	Deci:	$mg = BIl$	0,25	
	Cu intensitatea de la punctul a):	$mg = B^2l^2v\frac{\sin\alpha}{R}$	0,5	
	De unde rezultă viteza:	$v = \frac{mgR}{B^2l^2sin\alpha}$	0,5	
c)	Ecuația de mișcare a tijei:	$m\frac{dv}{dt} = G_t - F_t = mg\ sin\alpha - BIl\sin\alpha$	0,5	2,5
	sau:	$m\frac{dv}{dt} = mg\ sin\alpha - \frac{B^2l^2\ sin^2\alpha}{R}v$	0,5	
	care se poate rescrie sub forma:	$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2l^2\ sin^2\alpha}{mR}v = g\sin\alpha$	0,5	
	Comparând cu ecuația din “nota” avem:	$x = v;\ a = \frac{B^2l^2\ sin^2\alpha}{mR};\ b = g\sin\alpha$	0,5	
	Soluția este:	$x = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$ adică $v(t) = \frac{mgR}{B^2l^2\sin\alpha}\left(1 - e^{-\frac{B^2l^2\sin^2\alpha}{mR}t}\right)$	0,5	
d)	Viteza limită:	$v_{max} = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mgR}{B^2l^2\sin\alpha}$	0,5	0,5
e)	Echilibrul forțelor pe direcția normal la planul cadrului:	$F_n + N = G_n$	0,5	3
	Pentru ca tija să tindă să se desprindă de cadru trebuie îndeplinită condiția: $F_n \geq G_n$		0,5	
	sau, la limită:	$F_n = G_n$	0,5	
	adică:	$BIl\cos\alpha = mg\cos\alpha$	0,5	
	Cu intensitatea de la punctul a):	$\frac{B^2L^2v\sin\alpha}{R} = mg$	0,5	
	din care rezultă:	$v = \frac{mgR}{B^2L^2\sin\alpha}$	0,25	
	Viteza tinde spre această valoare doar când t tinde la infinit, deci nu poate fi atinsă la un moment t.		0,25	
	Total			10

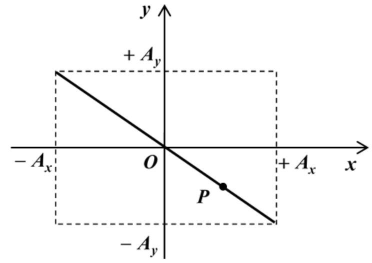
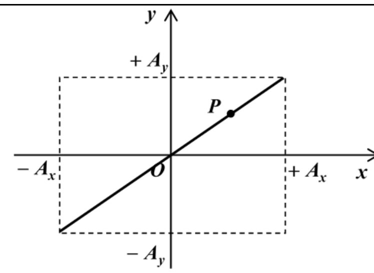
Subiectul 2 (oscilații mecanice)

A			
a)	În starea inițială, sistemul frânghie-Pământ are energia totală $E_c + E_p = 0 + mg\frac{l\sin\alpha}{2} = mg\frac{l\sin\alpha}{2}$ (1) în raport cu suprafața orizontală.	0,5	2
	Într-o situație intermediară, când pe planul înclinat se află o lungime x din frânghie, și pe planul orizontal $L-x$, sistemul frânghie-Pământ are energia $E'_c + E'_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{x}{L}mg\frac{x\sin\alpha}{2} = \frac{mv^2}{2} + mg\frac{x^2\sin\alpha}{2L}$ (2) unde am ținut cont că toate punctele frânghiei au aceeași viteză.	0,5	
	În baza legii conservării energiei, $mg\frac{l\sin\alpha}{2} = \frac{mv^2}{2} + mg\frac{x^2\sin\alpha}{2l}$ (3)	0,5	
	Din care obținem: $v(x) = \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)gl\sin\alpha}$ (4)	0,5	
b)	Energia din expresia (3) este de forma $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{k}{2}x^2 = \text{const.}$ (5)	0,5	1,5
	unde $k = \frac{mg\sin\alpha}{l}$ este o constantă specifică sistemului, iar $\mathrm{E} = \mathrm{mg}\frac{l\sin\alpha}{2}$ reprezintă energia totală a sistemului.	0,5	
	Datorită asemănării egalității (5) cu expresia energiei totale a unui oscilator armonic, se poate afirma că mișcarea frânghiei are caracteristicile unei mișcări oscilatorii, pe parcursul coborârii.	0,5	
c)	Mișcarea de coborâre a frânghiei, de pe planul înclinat pe suprafața orizontală, corespunde unui sfert de oscilație armonică. Ca urmare, timpul de coborâre $t_c = \frac{1}{4}T$ (6)	0,5	1,5
	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg\sin\alpha}l} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}}$ (7) $t_c = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}}$ (8)	1,0	
B			
a	$x(t) = A(t)\sin(\omega t + \varphi_0) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega t + \varphi_0)$ (1)	0,25	2,5
	$\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\frac{rad}{s}$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 5$ rad/s (2)	0,50	
	$\frac{b^2}{4m^2} = \frac{k^2}{m^2} - \omega^2 \Rightarrow \frac{b}{2m} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} = 3\ s^{-1}$ (3)	0,50	
	$x_0 = A_0\sin\varphi_0 = 4$ cm (4)	0,25	
	$v(t) = \frac{dx}{dt} = A_0\left(-\frac{b}{2m}\right)e^{-\frac{b}{2m}t}\cdot\sin(\omega t + \varphi_0) + A_0\omega e^{-\frac{b}{2m}t}\cdot\cos(\omega t + \varphi_0)$ (5)	0,25	
	$v(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\left[\left(-\frac{b}{2m}\right)\sin(\omega t + \varphi_0) + \omega\cos(\omega t + \varphi_0)\right]$ (6)	0,25	
	$v_0 = A_0\left[\left(-\frac{b}{2m}\right)\sin\varphi_0 + \omega\cos\varphi_0\right] = 0$ (7)	0,25	
	Din (4) și (7) rezultă $A_0 = 5$ cm și $\varphi_0 = \text{arctg}\frac{4}{3}$ (8)	0,25	
b	$x(t) = 5e^{-3t}\sin\left(4t + \text{arctg}\frac{4}{3}\right)$ (cm) (9)	0,50	0,5
c	Principiul II al mecanicii: $ma = -kx - 6\pi\eta rv$ (10) $\eta = \frac{-ma - m\omega_0^2 x}{6\pi rv}$ (11)	0,25	2,0

	Pentru determinarea lui η, trebuie exprimate viteza și accelerația, ca funcții de timp, urmând alegerea unui moment de timp la care viteza nu este nulă. Pe baza relației (6)	0,25	
	$v(t) = 5e^{-3t}\left[-3\sin\left(4t + \text{arctg}\frac{4}{3}\right) + 4\cos\left(4t + \text{arctg}\frac{4}{3}\right)\right]$ (12)	0,25	
	$a = \frac{dv}{dt} = 5e^{-3t}\left[-7\sin\left(4t + \text{arctg}\frac{4}{3}\right) - 24\cos\left(4t + \text{arctg}\frac{4}{3}\right)\right]$ (13)	0,25	
	la $t = \frac{T}{4}$: $x\left(\frac{0,5\pi}{4}\right) = 3e^{-\frac{1,5\pi}{4}}\ \text{cm}$ (14)	0,25	
	$v\left(\frac{0,5\pi}{4}\right) = 5e^{-\frac{1,5\pi}{4}}\left[-3\frac{3}{5} - 4\frac{4}{5}\right] = -25e^{-\frac{1,5\pi}{4}}\ \text{cm/s}$ (15)	0,25	
	$a\left(\frac{0,5\pi}{4}\right) = 5e^{-\frac{1,5\pi}{4}}\left[-7\frac{3}{5} + 24\frac{4}{5}\right] = 75e^{-\frac{1,5\pi}{4}}\ \text{cm/s}^2$ (16)	0,25	
	$\eta = \frac{-5\cdot 75e^{-\frac{1,5\pi}{4}} - 5\cdot 25\cdot 3e^{-\frac{1,5\pi}{4}}}{0,3\pi(-25)e^{-\frac{1,5\pi}{4}}} = \frac{100}{\pi} \simeq 31,8\ \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$ (17)	0,25	
	Sau: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \implies x = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega t - \varphi_0)$ $b = 6\pi\eta r \Rightarrow \eta = \frac{b}{6\pi r} = \frac{100}{\pi}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$		
	TOTAL		10

Subiectul 3 (unde mecanice)

f)	Ecuațiile elongațiilor celor două unde sunt: $x(z,t) = A_x \sin\left[2\pi\nu\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_0\right]$ (1) $y(z,t) = A_y \sin\left[2\pi\nu\left(t - \frac{l-z}{c}\right) + \varphi_0\right]$ (2)	1p 1p	2p
g)	Punctul P al mediului de propagare efectuează două mișcări oscilatorii liniar armonice de aceeași frecvență în lungul a două direcții reciproc perpendiculare, situate într-un plan perpendicular pe axa Oz.	0,5p	3p
	Ecuațiile celor două oscilații pot fi puse sub forma: $x(z,t) = A_x \sin[2\pi\nu t - \varphi_{0x}]$ $\varphi_{0x} = \varphi_0 - \frac{2\pi\nu}{c} z$ (3) $y(z,t) = A_y \sin[2\pi\nu t - \varphi_{0y}]$ $\varphi_{0y} = \varphi_0 - \frac{2\pi\nu}{c}(l - z)$ (4)	0,5p	
	Prin eliminarea timpului între cele două ecuații parametrice ale traiectoriei: $x = x(z,t)$ și $y = y(z,t)$ se obține ecuația traiectoriei:	0,5p	
	$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - 2\frac{x}{A_x}\frac{y}{A_y}\cos(\varphi_{0y} - \varphi_{0x}) = \sin^2(\varphi_{0y} - \varphi_{0x})$ (5)	0,5p	
	Ecuația implicită a traiectoriei descrise de punctul P este ecuația unei elipse, numită *elipsă de polarizare*, având centrul de simetrie în originea sistemului de coordonate Oxy și direcțiile axelor de simetrie rotite (înclinate) față de direcțiile axelor sistemului de coordonate.	0,5p	
	Elipsa de polarizare este înscrisă într-un *dreptunghi de încadrare* având laturile paralele cu axele sistemului de coordonate Oxy, acestea fiind egale cu $2A_x$ și, respectiv, cu $2A_y$. 	0,5p	
h)	Elipsa de polarizare degenerează într-o dreaptă când defazajul dintre cele două oscilații este: $\varphi_{0y} - \varphi_{0x} = k\pi$, $k \in Z$	0,5p	5p
	Din $\frac{2\pi\nu(2z - l)}{c} = k\pi$ rezultă succesiv: $2z - l = k\frac{c}{2\nu}$ și $z = \frac{l}{2} + k\frac{c}{4\nu}$.	0,5p	
	Folosind pentru lungimea mediului de propagare l valoarea indicată în datele problemei, $l = 2\frac{c}{\nu}$, se obține următoarea expresie pentru valorile coordonatelor cerute: $z_k = \frac{c}{\nu}\left(1 + \frac{k}{4}\right) = \left(1 + \frac{k}{4}\right)\lambda$ în care z trebuie să satisfacă simultan condițiile: $z > 0$ și $z < l = 2\lambda$.	0,5p	
	Din aceste condiții restrictive (impuse de enunț) se constată că sunt posibile doar următoarele șapte valori ale numărului întreg k, și anume: $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Valorile lui k corespunzătoare traiectoriilor punctului P ce trebuie reprezentate grafic sunt: $k = -3$ și $k = -2$.	0,5p	
	- Pentru $k = -3$, $\varphi_{0y} - \varphi_{0x} = -3\pi \Rightarrow \sin(\varphi_{0y} - \varphi_{0x}) = 0$ și $\cos(\varphi_{0y} - \varphi_{0x}) = -1$. În acest caz, ecuația elipsei de polarizare devine: $\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} + 2\frac{x}{A_x}\frac{y}{A_y} = 0$, din care rezultă: $y = -\frac{A_y}{A_x}x$.	0,5p	

	Aceasta este ecuația unei drepte suprapuse peste diagonala “descendentă” a dreptunghiului de încadrare a elipsei de polarizare și are graficul reprezentat in figura următoare:		1,0p	
	- Pentru $k = -2$, $\varphi_{0y} - \varphi_{0x} = -2\pi \Rightarrow$ $sin(\varphi_{0y} - \varphi_{0x}) = 0$ și $cos(\varphi_{0y} - \varphi_{0x}) = +1$. În acest caz, ecuația elipsei de polarizare devine: $\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - 2\frac{x}{A_x}\frac{y}{A_y} = 0$, din care rezultă: $y = +\frac{A_y}{A_x}x$		0,5p	
	Aceasta este ecuația unei drepte suprapuse peste diagonala “ascendentă” a dreptunghiului de încadrare a elipsei de polarizare și are graficul reprezentat in figura următoare:		1,0p	
		Total		**10p**