Subiectul I: Resort elicoidal (10 puncte)

A1	0,75 p
Alungirea relativă elementară a unei tije cu lungimea l este $$d\varepsilon = \frac{dl}{l},$$	0,25
de unde $$\varepsilon = \int_{L_0}^{L_0+\Delta L} \frac{dl}{l} = lnl\Big\|_{L_0}^{L_0+\Delta L} = ln\frac{L_0 + \Delta L}{L_0},$$ adică $$\boxed{\varepsilon = ln\left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right)}.$$	0,25
Pentru materialele elastice uzuale, pentru care $\frac{\Delta L}{L_0} \ll 1$, alungirea relativă devine $$\boxed{\varepsilon \cong \frac{\Delta L}{L_0}}.$$	0,25

A2	0,75 p
Din Fig. 2 reiese că $$\Delta h = D_1 tg\theta,$$ unde Δh este jumătate din pasul elicei.	0,25
Dar $$\pi^2 D^2 = \pi^2 D_1^2 + 4(\Delta h)^2.$$	0,25
Prin urmare $$\boxed{D_1 = \frac{D}{\sqrt{1 + \left(\frac{2tg\theta}{\pi}\right)^2}}}.$$	0,25

A3	2,5 p
Momentul produs de forța deformatoare F față de centrul suprafețelor de contact dintre jumătățile unei spire este $$F\frac{D_1}{2} = C \cdot 2\theta.$$	0,25
Alungirea produsă de această forță este	0,25

$$F = k\Delta L,$$	
unde $$\Delta L = 2\Delta h \cdot N,$$	0,25
numărul de spire ale resortului fiind $$N = \frac{L}{d}.$$	0,25
Prin urmare $$k = \frac{F}{\Delta L} = \frac{\frac{4C\theta}{D_1}}{\frac{2\Delta h \cdot L}{d}} = \frac{2dC\theta}{LD_1\Delta h}.$$	0,25
Cum $$\Delta h = D_1 tg\theta,$$ iar $$C = \frac{\pi G r^4}{2l},$$ unde $$r = \frac{d}{2}$$ și $$l = \frac{\pi D}{2},$$	0,25
atunci $$C = \frac{Gd^4}{16D}$$	0,25
și deci $$k = \frac{Gd^5\theta}{8LDD_1^2 tg\theta}.$$	0,25
Ținând cont de expresia găsită pentru D_1, atunci $$\boxed{k = \frac{Gd^5}{8LD^3} \cdot \frac{\theta}{tg\theta} \cdot \left[1 + \left(\frac{2tg\theta}{\pi}\right)^2\right]}.$$	0,25
Pentru deformații aflate în limita de elasticitate ale unui resort confecționat dintr-un material elastic uzual, $\theta \ll 1$ rad, așa încât $tg\theta \cong \theta$, de unde $$\boxed{k \cong \frac{Gd^5}{8LD^3}}.$$	0,25

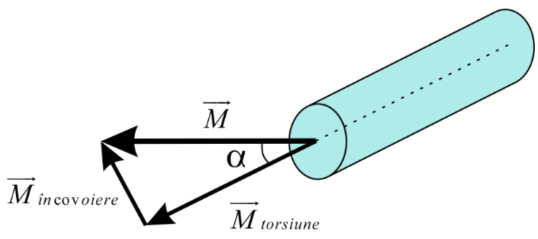
A4	**1 p**
$$\boxed{L_0 = \pi DN = \pi D\frac{L}{d} = \frac{\pi d^4 G}{8kD^2}}.$$	0,25
Valoarea numerică a lungimii firului este $$\boxed{L_0 = 0{,}94\ \text{m}}.$$	0,25
Numărul de spire este	0,25

$$\boxed{N = \frac{L_0}{\pi D} = \frac{d^4 G}{8kD^3}}$$	
$\boxed{N = 30}$.	0,25

B1	**1,25 p**
Lungimea totală a firului este $$\pi D N = \pi D' N + \frac{D'}{2}\varphi,$$	0,25
de unde $$\boxed{D' = \frac{D}{1 + \frac{\varphi}{2\pi N}} = \frac{D}{1 + \frac{\varphi d}{2\pi L}}}.$$	0,25
Lungimea inițială a resortului este $$L = dN = d\frac{L_0}{\pi D},$$	0,25
iar cea finală este $$L' = d\frac{L_0}{\pi D'} = d\frac{L_0}{\pi D}\left(1 + \frac{\varphi d}{2\pi L}\right) = L + \frac{\varphi d}{2\pi},$$	0,25
adică $$\boxed{\Delta L = \frac{\varphi d}{2\pi}}.$$	0,25

B2	**1,25 p**
Să presupunem că resortul este fixat la un capăt, iar la celălalt se aplică un moment de torsiune M, constant, care produce un unghi de torsiune φ. Atunci $$M = C\varphi.$$	0,25
Dacă un capăt al unui mic segment al tijei, ce are lungimea dL, este rotit cu unghiul $d\varphi$, atunci raza de curbură a tijei este $$R = \frac{dL}{d\varphi},$$ unde $$R = \frac{IE}{M}.$$	0,25
Dacă momentul încovoietor este constant, atunci $$dL = \frac{IE}{M}d\varphi,$$ sau $$\int_0^{L_0} dL = \frac{IE}{M}\int_0^{\varphi} d\varphi,$$ de unde	0,25

$$L_0 = \frac{IE}{M}\varphi.$$	
Prin urmare $$C = \frac{IE}{L_0} = \frac{\pi r^4 E}{4L_0}.$$	0,25
Deoarece $$L_0 = \pi D N = \pi D \frac{L}{d},$$ atunci $$\boxed{C = \frac{d^5 E}{64 D L}}.$$ Se vede de aici că, în cazul modulului de torsiune, constanta de torsiune a firului depinde de modulul lui Young.	0,25

C1	**2,5 p**
Lucrul mecanic efectuat de forța axială F, $$\mathcal{L} = \frac{F^2}{2k},$$	0,25
se regăsește în energie potențială în resort: $$E_p = E_{p,torsiune} + E_{p,încovoiere},$$	0,25
unde $$E_{p,torsiune} = \frac{M_{torsiune}^2}{2C} = \frac{M_{torsiune}^2 L_0}{2GJ}$$	0,25
și, similar, $$E_{p,încovoiere} = \frac{M_{încovoiere}^2 L_0}{2EI}$$	0,25
În acord cu Fig. 3, în care s-a reprezentat o porțiune de spiră, momentul produs de forța F, $$M = F\frac{D}{2},$$ poate fi descompus în două componente:  Fig. 1	0,25
• una de-a lungul axei elicoidale a firului, $$M_{torsiune} = M\cos\alpha,$$ care produce torsiunea firului	0,25
• și una perpendicular pe planul spirei, $$M_{încovoiere} = M\sin\alpha,$$ care produce încovoierea firului.	0,25
Prin urmare, $$\frac{F^2}{k} = M^2 L_0\left(\frac{\cos^2\alpha}{GJ} + \frac{\sin^2\alpha}{EI}\right),$$	0,25
sau, deoarece	0,25

$$L_0 = \pi D_{spiră} N,$$ iar $$D_{spiră} = \frac{D}{cos\alpha},$$	
atunci $$\boxed{k = \frac{d^4 cos\alpha}{8ND^3}\left(\frac{cos^2\alpha}{G} + \frac{2sin^2\alpha}{E}\right)^{-1}}.$$ ***Observație:*** *Se observă că pentru* $\alpha = 0$ *se obține rezultatul de la resortul bobinat strâns.*	0,25

Barem propus de

Conf. Univ. Dr. Sebastian POPESCU

Facultatea de Fizică, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza" din Iași

BAREM

Subiectul II: Motorul endoreversibil (10 puncte)

1	**1 p**
Conform principiului I al termodinamicii : $$L = Q_C - Q_R$$ $$\frac{L}{\Delta t} = \frac{Q_C}{\Delta t} - \frac{Q_R}{\Delta t} \Leftrightarrow \dot{L} = \dot{Q}_C - \dot{Q}_R \qquad (1.\ 1)$$	0,2 p
Randamentul poate fi exprimat dupa cum urmează: $$\eta = \frac{\dot{L}}{\dot{Q}_C} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$ $$\text{unde: } \dot{Q}_C = \frac{T_C - T_1}{R_C},\ \dot{Q}_R = \frac{T_2 - T_R}{R_R} \qquad (1.2)$$ $$\dot{Q}_R = \dot{Q}_C - \dot{L} = \dot{Q}_C(1-\eta)$$	0,3 p
În urma prelucrărilor algebrice obținem: $$\eta = 1 - \frac{T_R}{T_C - \dot{Q}_C(R_C + R_R)}; \qquad (1.3)$$	0,5 p
2	**0,5 p**
Conform relației (1.3), obținem randamentul ciclului Carnot dacă: $$\dot{Q}_C \to 0 \text{ (transfer foarte lent de caldura)} \qquad (2.1)$$	0,25 p
sau: $$R_C + R_R \to 0 \text{ (rezistente termice neglijabile)} \qquad (2.2)$$	0,25 p
3	**0,5 p**
Din condiția ca randamentul să fie mai mare sau (la limită) egal cu zero obținem: $$\eta = 1 - \frac{T_R}{T_C - \dot{Q}_C(R_C + R_R)} \geq 0$$ sau $$\frac{T_R}{T_C - \dot{Q}_C(R_C + R_R)} \leq 1 \qquad (3.1)$$	0,25 p
La limită: $$\frac{T_R}{T_C - \dot{Q}_C^{\max}(R_C + R_R)} = 1 \qquad (3.2)$$	0,15p
de unde rezultă: $$\dot{Q}_C^{\max} = \frac{T_C - T_R}{R_C + R_R} \qquad (3.3)$$	0,1p
4	**2 p**
Expresia puterii în funcție de căldura primită în unitatea de timp: $$P = \dot{L} = \eta \dot{Q}_C = \left[1 - \frac{T_R}{T_C - \dot{Q}_C(R_C + R_R)}\right]\dot{Q}_C \qquad (4.1)$$	0,5p
Condiția de extrem: $$\frac{dP}{d\dot{Q}_C} = 0 \qquad (4.2)$$	0,25p
conduce către ecuația de gradul doi:	0,25p

$$\dot{Q}_C^2(R_C+R_R)^2-2T_C\dot{Q}_C(R_C+R_R)+T_C(T_C-T_R)=0 \qquad (4.3)$$	
Soluțiile ecuației de gradul doi sunt: $$\dot{Q}_{C_{1,2}}^{opt}=\frac{\sqrt{T_C}}{R_C+R_R}\left(\sqrt{T_C}\pm\sqrt{T_R}\right) \qquad (4.4)$$	0,5p
Raportul $\dot{Q}_C^{opt}/\dot{Q}_C^{\max}$ este: $$\frac{\dot{Q}_{C_{1,2}}^{opt}}{\dot{Q}_C^{\max}}=\frac{\sqrt{T_C}}{\sqrt{T_C}\mp\sqrt{T_R}} \qquad (4.5)$$	0,25p
Observație: Doar solutia $$\dot{Q}_C^{opt}=\frac{\sqrt{T_C}}{R_C+R_R}\left(\sqrt{T_C}-\sqrt{T_R}\right) \qquad (4.6)$$ este corecta din punct de vedere fizic, cea de a doua fiind mai mare decat $\dot{Q}_C^{\max}$.	0,25p
5	**1 p**
Randamentul în condițiile de maxim pentru puterea generată este: $$\eta^{opt}=1-\frac{T_R}{T_C-\dot{Q}_C^{opt}(R_C+R_R)}; \qquad (5.1)$$	0,5p
Înlocuind $\dot{Q}_C^{opt}$ conform relației (4.6) obținem: $$\eta^{opt}=1-\sqrt{\frac{T_R}{T_C}}; \qquad (5.2)$$	0,25p
Raportul η^{opt}/η_{Carnot}: $$\frac{\eta^{opt}}{\eta_{Carnot}}=\frac{1-\sqrt{\frac{T_R}{T_C}}}{1-\frac{T_R}{T_C}}=\frac{1}{1+\sqrt{\frac{T_R}{T_C}}}<1; \qquad (5.3)$$	0,25p
6	**1 p**
Puterea maximă este: $$P^{\max}=\eta^{opt}\dot{Q}_C^{opt} \qquad (6.1)$$	0,4p
Utilizând relațiile (4.6) și (5.2) obținem: $$P^{\max}=\frac{\left(\sqrt{T_C}-\sqrt{T_R}\right)^2}{R_C+R_R}; \qquad (6.2)$$	0,6p
7	**2 p**
Ecuațiile care descriu compresia adiabatică între stările 4 și 1, și destinderea adiabatică între stările 2 și 3 ale ciclului Carnot sunt: $$T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_4^{\gamma-1},$$ $$T_1V_2^{\gamma-1}=T_2V_3^{\gamma-1}$$ de unde rezulta: $$\frac{V_2}{V_1}=\frac{V_3}{V_4}\ \text{si}\ V_2=V_3\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma-1)} \qquad (7.1)$$	0,5p
Lucrul mecanic efectuat într-un ciclu este: $$L=Q_C-\lvert Q_P\rvert=\frac{m}{\mu}R\left(T_1\ln\frac{V_2}{V_1}-T_2\ln\frac{V_3}{V_4}\right)=$$ $$\frac{m}{\mu}R\left(T_1-T_2\right)\ln\frac{V_2}{V_1}=\frac{m}{\mu}R\left(T_1-T_2\right)\ln\left[\frac{V_3}{V_1}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma-1)}\right] \qquad (7.2)$$	0,5p
Deoarece $V_1=V_{\min}$ și $V_3=V_{\max}$, ținând cont de definițiile ratelor de transport și înlocuind în expresia (7.2) obținem:	

$$L=\frac{m}{\mu}R\left(T_1-T_2\right)\left[\ln r+\frac{1}{\gamma-1}\ln\frac{T_2}{T_1}\right]=$$ $$\frac{m}{\mu}R\left(T_C-R_C\dot{Q}_C-T_R-R_R\dot{Q}_R\right)\left[\ln r+\frac{1}{\gamma-1}\ln\frac{T_R+R_R\dot{Q}_R}{T_C-R_C\dot{Q}_C}\right]$$	(7.3)	1p
8		**2 p**
Legătura dintre lucrul mecanic și putere: $$P=\frac{L}{\Delta t}$$	(8.1)	0,25p
În regim optim de funcționare avem: $$P=P^{opt}$$ $$\dot{Q}_C=\dot{Q}_C^{opt}$$ $$\eta=\eta^{opt}=1-\frac{T_2}{T_1}=1-\sqrt{\frac{T_R}{T_C}}$$ $$\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{T_R}{T_C}};$$	(8.2)	0,5p
Expresia pentru T_1 este: $$T_1=T_C-R_C\,\dot{Q}_C^{opt}=\frac{T_CR_R+R_C\sqrt{T_CT_R}}{R_C+R_R};$$	(8.3)	0,25p
Expresia pentru T_2 este: $$T_2=T_1\sqrt{\frac{T_R}{T_C}}=\frac{R_R\sqrt{T_CT_R}+R_CT_R}{R_C+R_R};$$	(8.4)	0,25p
Durata unui ciclu va fi: $$\Delta t=\frac{L}{P^{opt}}=$$ $$\frac{m}{\mu}R\frac{R_RT_C-R_CT_R+\left(R_C-R_R\right)\sqrt{T_CT_R}}{\left(\sqrt{T_C}-\sqrt{T_R}\right)^2}\left[\ln r+\frac{1}{\gamma-1}\ln\frac{R_R\sqrt{T_CT_R}+R_CT_R}{R_RT_C+R_C\sqrt{T_CT_R}}\right]$$	(8.5)	0,5p
În cazul particular $R_C=R_R$, relația (8.5) devine: $$\Delta t=\frac{m}{\mu}R\frac{R_C\left(\sqrt{T_C}+\sqrt{T_R}\right)}{\sqrt{T_C}-\sqrt{T_R}}\left[\ln r+\frac{1}{2\left(\gamma-1\right)}\ln\frac{T_R}{T_C}\right]$$	(8.6)	0,25p

Barem propus de:

Lector Univ. Dr. Adrian NECULAE, Universitatea de Vest din Timișoara

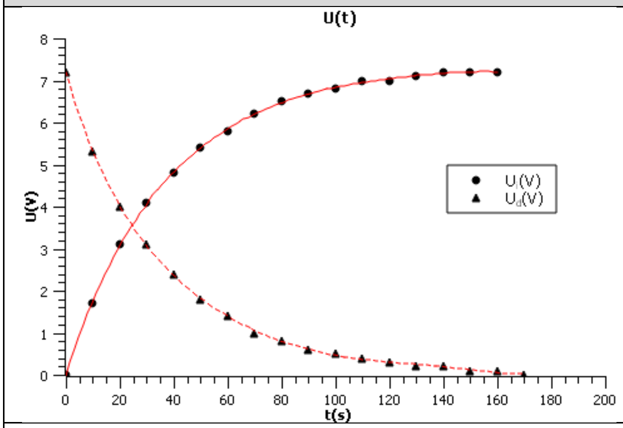
ON-SRF

29mai2021

Baraj

BAREM

Subiectul III: (10 puncte)

A	**2 p**
	1,0 p
Axe sclate, mărimi fizice, untiăţi de măsură, curbe	1,0 p
B	**0,5 p**
R = 2,5MΩ este cu multe ordine de mărime mai mare decât rezistenţa internă a surselor de curent continuu	0,5 p
C	**2,5 p**
Tensiunile din circuit: $RI(t) = E - \frac{q(t)}{C}$	0,3 p
prin derivare în funcţie de timp: $R\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{dq(t)}{dt} \cdot \frac{1}{C}$	0,4 p
sau: $R\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{I(t)}{C}$; deci: $\frac{dI(t)}{I(t)} = -\frac{1}{RC}dt$	0,3 p
Integrăm de la 0 la t: $\int_{I_0}^{I} \frac{dI(t)}{I(t)} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$	0,4 p
Găsim: $\ln\frac{I(t)}{I_0} = -\frac{t}{RC}$; deci: $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$	0,3 p
La t=0s avem q(0)=0C deci: $I_0 = \frac{E}{R}$	0,2 p
Deci: $I(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$	
Dar: $U_C(t) = E - RI(t)$	0,3 p
Inlocuind găsim: $U_C(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$	0,3 p
D	**0,5 p**
S-a demonstrat mai sus: $I(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$	0,5 p
E	**1,5 p**
Tensiunea: $U_C(\tau_t) = E \cdot (1 - e^{-1})$	0,4 p
Numeric: $U_C(\tau_t) = 5{,}688V$	0,3 p
Din grafic: $U_{Cexp}(\tau_t) = 5{,}2V$	0,4 p
Explicaţie: prezenţa voltmetrului real face ca prin acesta să avem "pierderi" de curent, deci condensatorul se încarcă mai încet	0,4 p

F	**1,5 p**
Asemănător cu punctul c). Diferenţe: $E = 0$; Sensul curentului: invers; $I_0 = U_2(0)/R$	0,5 p
R şi R_v în paralel, deci $R_{ech} = \frac{R \cdot R_v}{R + R_v}$	0,3 p
Se obţine: $U_2(t) = U_2(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ unde $\tau_2 = R_{ech} \cdot C$	0,5 p
Pentru datele din tabel/grafic: $U_2(0) = 7{,}2V$	0,2 p
G	**1,5 p**
Avem $U_2(\tau_2) = U_2(0) \cdot e^{-1} = 7{,}2 / 2{,}718 = 2{,}649$ V	0,3 p
Conform graficului, această valoare se atinge pentru circa t = 35 s, deci: $\tau_2 = 35$ s (valorile apropiate sunt corecte, conform graficului fiecăruia)	0,3 p
Dar: $\tau_2 = R_{ech}C$	
Deci: $R_{ech} = \tau_2 / C = 35 / 19$ MΩ $= 1{,}84$ MΩ	0,3 p
Dar: $R_v = \frac{R \cdot R_e}{R - R_e}$	0,3 p
Deci: $R_v = 4{,}75$ MΩ	0,3 p

Subiect propuse de:
Lect. Univ.Dr. Mihai Vasilescu, Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca.

Subiectul I: *Experimentul lui Fizeau* (10 puncte)

<table>
<tr><th>a)</th><th>3 p</th></tr>
<tr><td>Notații în desenul din figura IV.1.R, raportate la ramura T_1 a tubului: $\vec{v}'_1$ – viteza luminii în raport cu lichidul din ramura T_1 a tubului (viteza luminii în raport cu sistemul R', solidar cu apa din ramura T_1 a tubului); $\vec{v}_1$ – viteza luminii prin lichidul din ramura T_1 a tubului, în raport cu sistemul R al observatorului; n – indicele de refracție al lichidului în sistemul R; c – viteza luminii în vid.

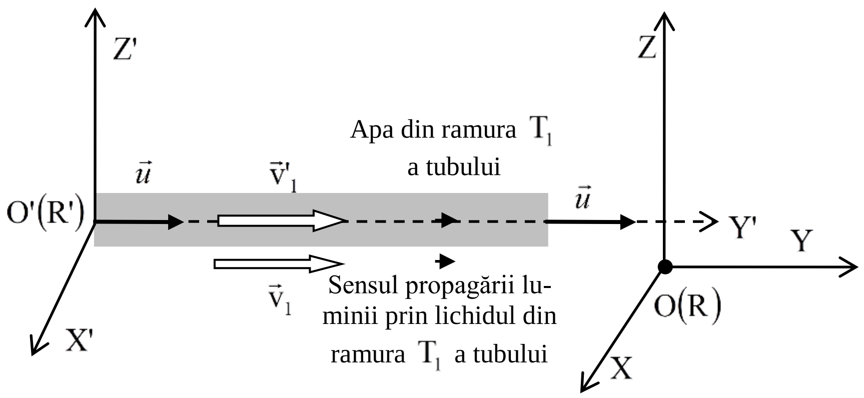


Fig. IV.1.R

În acord cu regula de compunere relativistă a vitezelor, rezultă:

$$n = \frac{c}{v'_1};\ v'_1 = \frac{c}{n};$$

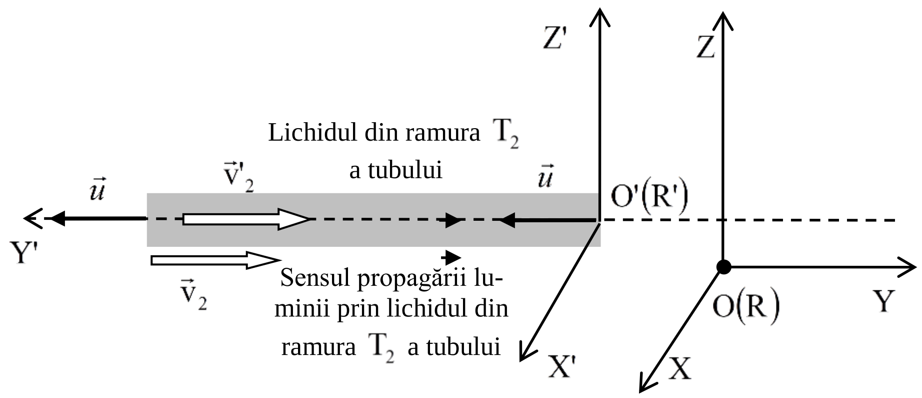
$$v_Y = \frac{v'_{Y'} + v_0}{1 + \frac{v'_{Y'} v_0}{c^2}};$$</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>

$$v_1 = \frac{v'_1 + u}{1 + \frac{v'_1 u}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + u}{1 + \frac{u}{nc}} = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{un}{c}\right)\cdot\left(1 + \frac{u}{nc}\right)^{-1} = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{un}{c}\right)\cdot\left(1 - \frac{u}{nc}\right);$$

$$v_1 = \frac{c}{n}\left(1 - \frac{u}{nc} + \frac{un}{c} - \frac{u^2}{c^2}\right);$$</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>

$$u \ll c;\ v_1 \approx \frac{c}{n}\left(1 - \frac{u}{nc} + \frac{un}{c}\right);$$

$$v_1 = \frac{c}{n} + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>Notații în desenul din figura IV.2.R, raportate la ramura T_2 a tubului: $\vec{v}'_2$ – viteza luminii în raport cu lichidul din ramura T_2 a tubului (viteza luminii în raport cu sistemul R', solidar cu apa din ramura T_1 a tubului); $\vec{v}_2$ – viteza luminii prin lichidul din ramura T_2 a</td><td>0,50</td></tr>
</table>

tubului, în raport cu sistemul R al observatorului; n – indicele de refracție al lichidului în sistemul R; c – viteza luminii în vid.  **Fig. IV.2.R** În acord cu regula de compunere relativistă a vitezelor, rezultă: $$n=\frac{c}{v'_2};\ v'_2=\frac{c}{n};$$ $$v_Y=\frac{v'_{Y'}-v_0}{1-\frac{v'_{Y'}v_0}{c^2}};$$	
$$v_2=\frac{v'_2-u}{1-\frac{v'_2 u}{c^2}}=\frac{\frac{c}{n}-u}{1-\frac{u}{nc}}=\frac{c}{n}\left(1-\frac{un}{c}\right)\cdot\left(1-\frac{u}{nc}\right)^{-1}=\frac{c}{n}\left(1-\frac{un}{c}\right)\cdot\left(1+\frac{u}{nc}\right);$$ $$v_2=\frac{c}{n}\left(1+\frac{u}{nc}-\frac{un}{c}+\frac{u^2}{c^2}\right);$$	0,50
$$u\ll c;\ v_2\approx\frac{c}{n}\left(1+\frac{u}{nc}-\frac{un}{c}\right);$$ $$v_2=\frac{c}{n}-u\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$	0,50
b)	**2 p**
Deoarece lichidul este în mișcare prin tub, diferența de timp acumulată de razele care interferă în punctul O este: $$\Delta t=t_2-t_1=\frac{l}{v_2}-\frac{l}{v_1}=l\cdot\frac{v_1-v_2}{v_1v_2};$$ $$\Delta t=l\cdot\frac{2u\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{c^2}{n^2}-u^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2};$$	0,25

$$u << c;\ u^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2 << \frac{c^2}{n^2};$$ $$\Delta t \approx l\cdot\frac{2u\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{c^2}{n^2}} = \frac{2lu}{c^2}\left(n^2-1\right);$$	0,25
$$\Delta p = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta t}{\frac{\lambda}{c}} = \frac{c}{\lambda}\Delta t = \frac{c}{\lambda}\cdot\frac{2lu}{c^2}\left(n^2-1\right);\ \Delta p = \frac{2lu}{\lambda c}\left(n^2-1\right);$$ $$\Delta p = \frac{2\cdot 2\,\mathrm{m}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}589\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}\cdot 3\cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\left(1{,}629^2-1\right) = 0{,}37\ \text{interfranje.}$$	0,50
În cadrul cinematicii clasice: $$\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}'_1 + u = \frac{c}{n} + u;$$ $$\mathrm{v}_2 = \mathrm{v}'_2 - u = \frac{c}{n} - u;$$ $$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{l}{\mathrm{v}_2} - \frac{l}{\mathrm{v}_1} = l\cdot\frac{\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2}{\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2};$$ $$\Delta t = \frac{2lu}{\frac{c^2}{n^2}-u^2};\ u << \frac{c}{n};$$ $$\Delta t = \frac{2lun^2}{c^2};$$	0,50
$$\Delta p = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta t}{\frac{\lambda}{c}} = \frac{c}{\lambda}\Delta t = \frac{c}{\lambda}\cdot\frac{2lun^2}{c^2};\ \Delta p = \frac{2lun^2}{\lambda c};$$ $$\Delta p = \frac{2\cdot 2\,\mathrm{m}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 1{,}629^2}{0{,}589\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}\cdot 3\cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}59\ \text{interfranje.}$$	0,50
c)	**1 p**
În centrul O al ocularului se va observa un minim nul de interferență, dacă ordinul de interferență este un număr semi-întreg, adică: $$\Delta p = k + \frac{1}{2};\ k = 0, 1, 2, ...;$$ $$\Delta p = \frac{2lu}{\lambda c}\left(n^2-1\right) = \frac{2k+1}{2};$$ $$u = (2k+1)\frac{\lambda c}{4l\left(n^2-1\right)};$$	0,50

<table>
<tr><td>

$$k = 0;\ u_{\min} = \frac{\lambda c}{4l\left(n^2 - 1\right)};$$

$$u_{\min} = \frac{0{,}589 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4 \cdot 2\ \mathrm{m} \cdot \left(1{,}629^2 - 1\right)} = 13{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>4 p</td></tr>
<tr><td>

Unda electromagnetică (lumina), a cărei lungime de undă, în sistemul de referință al laboratorului (al observatorului), este λ, are, în sistemul de referință atașat lichidului care curge prin ramura T_1 a tubului, așa cum indică desenul din figura IV.3.R, lungimea de undă $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$, datorită efectului Doppler longitudinal, când $u << c$, astfel încât:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{u}{c}.$$

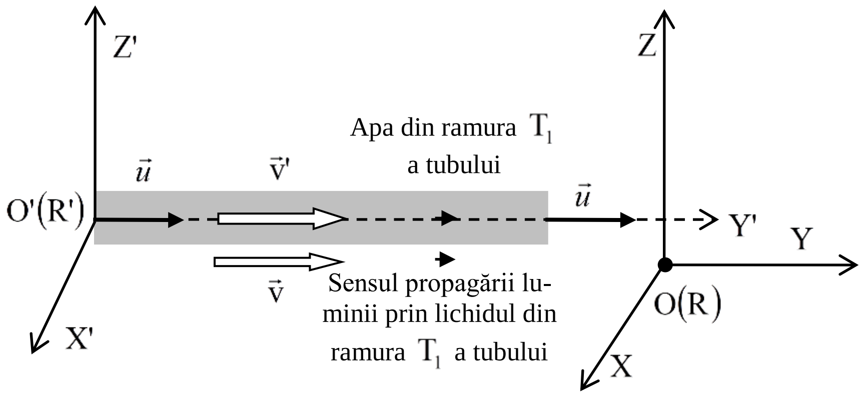


Fig. IV.3.R

Notații: $\vec{v}'$ – viteza luminii în raport cu lichidul din ramura T_1 a tubului (viteza luminii în raport cu sistemul R', solidar cu apa din ramura T_1 a tubului); $\vec{v}$ – viteza luminii prin lichidul din ramura T_1 a tubului, în raport cu sistemul R al observatorului; n' – indicele de refracție al lichidului în sistemul R'; n – indicele de refracție al lichidului în sistemul R; c – viteza luminii în vid.

În aceste condiții, utilizând regula de compunere a vitezelor relativiste, rezultă:

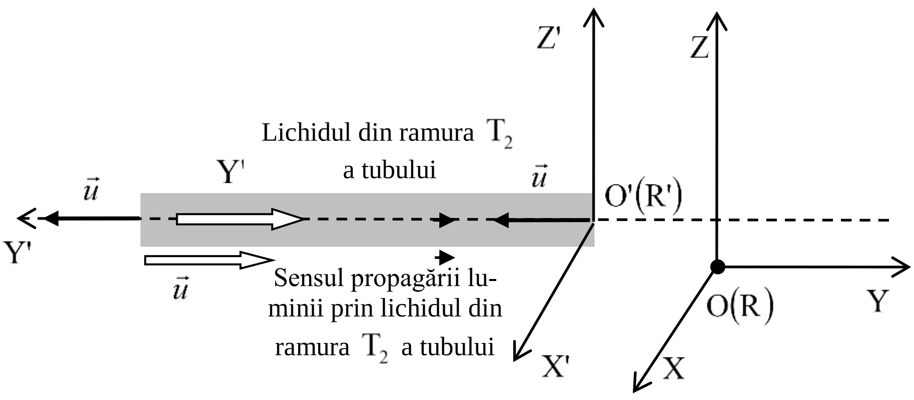
$$n' = \frac{c}{v'};\ v' = \frac{c}{n'};$$

$$n = \frac{c}{v};\ v = \frac{c}{n};$$

$$v_Y = \frac{v'_{Y'} + v_0}{1 + \dfrac{v'_{Y'} v_0}{c^2}};$$

</td><td>0,50</td></tr>
</table>

$$\text{v}=\frac{\text{v}'+u}{1+\frac{\text{v}'u}{c^2}}=\frac{\frac{c}{n'}+u}{1+\frac{u}{n'c}};$$ $$n'=n+\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda;\ \frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{u}{c}=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda};\ \mathrm{d}\lambda=\lambda\frac{u}{c};$$ $$n'=n+\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda=n+\frac{u}{c}\lambda\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=n\left(1+\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right);$$ $$\text{v}'=\frac{c}{n'}=\frac{c}{n\left(1+\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)}=\frac{c}{n}\left(1+\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{-1};$$ $$\frac{c}{n'}=\frac{c}{n}\left(1-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right);$$ $$1+\frac{u}{n'c}=1+\frac{u}{nc\left(1+\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)}=1+\frac{u}{nc}\left(1+\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{-1};$$ $$1+\frac{u}{n'c}=1+\frac{u}{nc}\left(1-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)=1+\frac{u}{nc}-\frac{u^2}{c^2}\frac{\lambda}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda};$$	0,50
$$u<<c;\ \frac{u^2}{c^2}\frac{\lambda}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\to 0;$$ $$1+\frac{u}{n'c}\approx 1+\frac{u}{nc};$$ $$\text{v}=\frac{\frac{c}{n'}+u}{1+\frac{u}{n'c}};$$ $$\text{v}=\frac{\frac{c}{n}\left(1-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)+u}{1+\frac{u}{nc}}=\frac{\frac{c}{n}\left(1-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)+u\frac{c}{n}\frac{n}{c}}{1+\frac{u}{nc}};$$ $$\text{v}=\frac{\frac{c}{n}\left(1+\frac{un}{c}-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)}{1+\frac{u}{nc}};$$ $$\text{v}=\frac{c}{n}\left(1+\frac{un}{c}-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)\cdot\left(1+\frac{u}{nc}\right)^{-1};$$ $$\text{v}=\frac{c}{n}\left(1+\frac{un}{c}-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)\cdot\left(1-\frac{u}{nc}\right);$$ $$\text{v}=\frac{c}{n}\left(1-\frac{u}{nc}+\frac{un}{c}-\frac{un}{c}\frac{u}{cn}-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}+\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\frac{u}{cn}\right);$$	0,50

$$\mathrm{v}=\frac{c}{n}\left(1-\frac{u}{nc}+\frac{un}{c}-\frac{u^2}{c^2}-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}+\frac{u^2}{c^2}\frac{\lambda}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right);$$ $$\mathrm{v}\approx\frac{c}{n}\left(1-\frac{u}{nc}+\frac{un}{c}-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right);$$ $$\mathrm{v}=\frac{c}{n}+u\left(1-\frac{1}{n^2}-\frac{\lambda}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right);$$	
$$n_{\mathrm{F}}=\frac{c}{\mathrm{v}};\ \frac{1}{n_{\mathrm{F}}}=\frac{\mathrm{v}}{c};$$ $$\frac{1}{n_{\mathrm{F}}}=\frac{1}{n}+\frac{u}{c}\left(1-\frac{1}{n^2}-\frac{\lambda}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right);\ \text{pentru tubul } \mathrm{T}_1.$$	0,25
Unda electromagnetică (lumina), a cărei lungime de undă, în sistemul de referință al laboratorului (al observatorului), este λ, are, în sistemul de referință atașat lichidului care curge prin ramura T_2 a tubului, așa cum indică desenul din figura IV.4.R, lungimea de undă $\lambda'=\lambda+\Delta\lambda$, datorită efectului Doppler longitudinal, când $u \ll c$, astfel încât: $$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{u}{c}.$$  **Fig. IV.4.R** În aceste condiții, utilizând regula de compunere a vitezelor relativiste, rezultă: $$n'=\frac{c}{\mathrm{v}'};\ \mathrm{v}'=\frac{c}{n'};$$ $$n=\frac{c}{\mathrm{v}};\ \mathrm{v}=\frac{c}{n};$$ $$\mathrm{v}_{\mathrm{Y}}=\frac{\mathrm{v}'_{\mathrm{Y'}}+\mathrm{v}_0}{1+\frac{\mathrm{v}'_{\mathrm{Y'}}\mathrm{v}_0}{c^2}};$$	0,50

$$\mathrm{v}=\frac{\mathrm{v}'-u}{1-\frac{\mathrm{v}'u}{c^2}}=\frac{\frac{c}{n'}-u}{1-\frac{u}{n'c}};$$ $$n'=n+\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda;\ \frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{u}{c}=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda};\ \mathrm{d}\lambda=\lambda\frac{u}{c};$$ $$n'=n+\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda=n+\frac{u}{c}\lambda\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=n\left(1+\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right);$$ $$\mathrm{v}'=\frac{c}{n'}=\frac{c}{n\left(1+\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)}=\frac{c}{n}\left(1+\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{-1};$$ $$\frac{c}{n'}=\frac{c}{n}\left(1-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right);$$ $$1-\frac{u}{n'c}=1-\frac{u}{nc\left(1+\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)}=1-\frac{u}{nc}\left(1+\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{-1};$$ $$1-\frac{u}{n'c}=1-\frac{u}{nc}\left(1-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)=1-\frac{u}{nc}+\frac{u^2}{c^2}\frac{\lambda}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda};$$	0,50
$$u<<c;\ \frac{u^2}{c^2}\frac{\lambda}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\to 0;$$ $$1-\frac{u}{n'c}\approx 1-\frac{u}{nc};$$ $$\mathrm{v}=\frac{\frac{c}{n'}-u}{1-\frac{u}{n'c}};$$ $$\mathrm{v}=\frac{\frac{c}{n}\left(1-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)-u}{1-\frac{u}{nc}}=\frac{\frac{c}{n}\left(1-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)-u\frac{c}{n}\frac{n}{c}}{1-\frac{u}{nc}};$$ $$\mathrm{v}=\frac{\frac{c}{n}\left(1-\frac{un}{c}-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)}{1-\frac{u}{nc}};$$ $$\mathrm{v}=\frac{c}{n}\left(1-\frac{un}{c}-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)\cdot\left(1-\frac{u}{nc}\right)^{-1};$$ $$\mathrm{v}=\frac{c}{n}\left(1-\frac{un}{c}-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)\cdot\left(1+\frac{u}{nc}\right);$$ $$\mathrm{v}=\frac{c}{n}\left(1+\frac{u}{nc}-\frac{un}{c}-\frac{un}{c}\frac{u}{cn}-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\frac{u}{cn}\right);$$	0,50

$$\mathrm{v}=\frac{c}{n}\left(1+\frac{u}{nc}-\frac{un}{c}-\frac{u^2}{c^2}-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}-\frac{u^2}{c^2}\frac{\lambda}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right);$$ $$\mathrm{v}\approx\frac{c}{n}\left(1+\frac{u}{nc}-\frac{un}{c}-\frac{u}{c}\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right);$$ $$\mathrm{v}=\frac{c}{n}+u\left(-1+\frac{1}{n^2}-\frac{\lambda}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right);$$	
$$n_\mathrm{F}=\frac{c}{\mathrm{v}};\ \frac{1}{n_\mathrm{F}}=\frac{\mathrm{v}}{c};$$ $$\frac{1}{n_\mathrm{F}}=\frac{1}{n}+\frac{u}{c}\left(-1+\frac{1}{n^2}-\frac{\lambda}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right);\ \text{pentru tubul } \mathrm{T}_2;$$	0,25
$$\frac{1}{n_\mathrm{F}}=\frac{1}{n}+\frac{u}{c}\left(\pm1\mp\frac{1}{n^2}-\frac{\lambda}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right).$$	0,50

Barem propus de:

Prof. Dr. Gabriel FLORIAN,

Prof. Dr. Mihail SANDU,

Departamentul de Fizică, Facultatea de Științe,

Universitatea din Craiova

Nr. item	Subiectul V: Plumb		Punctaj
A.1.	Masa atomică medie a plumbului $\mu = \sum_{i=1}^{4} \mu_i \cdot \frac{N_i}{N}$	0,3p	0,5p
	Valoarea masei atomice medii, exprimată în unități atomice de masă $\mu = 207,24$	0,2p	
A.2.	Distanța minimă $d_{\min}$ între doi atomi de plumb din structura CFC $d_{\min} = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad d_{\min} = 2 \cdot r_{atomic}$	0,2p	1,5p
	Lungimea laturii cubului corespunzător celulei elementare a plumbului $\ell = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \ell = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r_{atomic}$	0,2p	
	Volumul celulei elementare a plumbului $V = a^3$ $\quad V = 16\sqrt{2} \cdot r_{atomic}^3$	0,2p	
	Numărul de atomi de plumb dintr-o celulă elementară $N = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2}$ $\quad N = 4$	0,5p	
	Masa celor patru atomi de plumb dintr-o celulă elementară $\quad M = 4 \cdot \mu \cdot u$	0,2p	
	Valoarea estimată pentru densitatea plumbului $\quad \rho_{Pb} = 11,34 \times 10^3 kg/m^3$	0,2p	
B.1.	Legea de dezintegrare radioactivă pentru nucleele de U^{238} $N^{238}(t) = N_0^{238} \cdot e^{-\lambda_{238} \cdot t}$	0,5p	2,5p
	Numărul de nuclee de Pb^{206}, care s-au format în timpul t, ca produs final al seriei radioactive $n^{206}(t) = N_0^{238}\left(1 - e^{-\lambda_{238} \cdot t}\right)$	0,7p	
	Numărul de nuclee de Pb^{206} exprimat în funcție de numărul actual de nuclee de uraniu $n^{206}(t) = N^{238}\left(e^{\lambda_{238} \cdot t} - 1\right)$	0,5p	
	Constanta de dezintegrare radioactivă a nucleelor de U^{238} $\lambda_{238} = \frac{\ln 2}{T_{238}}$	0,3p	
	$n^{206}(t) = N^{238} \cdot \left[\exp\left(\frac{\ln 2}{4,5} t\right) - 1\right]$ $\quad n^{206}(t) = N^{238} \cdot \left[\exp(0,154 \cdot t) - 1\right]$	0,5p	

<table>
<tr><td rowspan="2">B.2.</td><td>$n^{207}(t) = N^{235}\left(e^{\lambda_{235}\cdot t} - 1\right)$</td><td>0,5p</td><td rowspan="2">1,0p</td></tr>
<tr><td>$n^{207}(t) = N^{235}\cdot\left[\exp(0{,}976\cdot t) - 1\right]$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">C.1.</td><td>
<table>
<tr><th>Minereu de plumb</th><th>^{204}N</th><th>:</th><th>^{206}N</th><th>:</th><th>^{207}N</th></tr>
<tr><td>cu uraniu</td><td>1,00</td><td>:</td><td>29,6</td><td>:</td><td>22,6</td></tr>
<tr><td>fără uraniu</td><td>1,00</td><td>:</td><td>17,9</td><td>:</td><td>15,5</td></tr>
<tr><td>Diferența</td><td>-</td><td></td><td>$\eta_1 = 11{,}7$</td><td></td><td>$\eta_2 = 7{,}1$</td></tr>
</table>
</td><td>2,0p</td><td rowspan="3">3,0p</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{N^{238}\left(\exp(0{,}154\cdot T) - 1\right)}{N^{235}\left(\exp(0{,}976\cdot T) - 1\right)} = \dfrac{\eta_1}{\eta_2}$</td><td>0,5p</td></tr>
<tr><td>Expresia pentru vârsta a Pământului
$\dfrac{\left[\exp(0{,}154\cdot T) - 1\right]}{\left[\exp(0{,}976\cdot T) - 1\right]} = 0{,}012$</td><td>0,5p</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C.2.</td><td>Vârsta aproximativă a Pământului, în ipoteza că T este mult mai mare decât fiecare dintre timpii de viață ai celor doi izotopi ai uraniului
$\begin{cases} \dfrac{\exp(0{,}154\cdot T_{aprox})}{\exp(0{,}976\cdot T_{aprox})} \approx 0{,}012 \\ \exp(-0{,}822\cdot T_{aprox}) \approx 0{,}012 \end{cases}$</td><td>1,0p</td><td rowspan="2">1,5p</td></tr>
<tr><td>Valoarea estimată pentru vârsta Pământului
$T_{aprox} \approx 5{,}38\cdot 10^{9}\,ani$</td><td>0,5p</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="right">Punctaj total</td><td>10p</td></tr>
</table>

© Barem de evaluare și de notare propus de:

Conf. Univ. Dr. Adrian DAFINEI