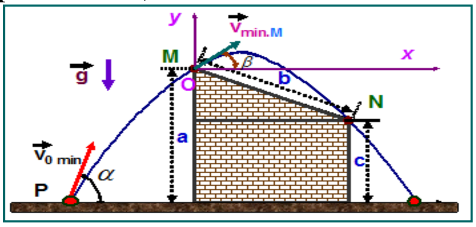
BAREM DE NOTARE/EVALUARE/CORECTARE → Clasa a X-a

Subiect I - MECANICĂ CLASICĂ	Parţial	Punctaj
Barem subiect I		**10 puncte**
Problema I. Mişcări în câmpuri de forte conservative		**10 puncte**
Problema I.A.		**6 puncte**

Iniţial, pentru a simplifica rezolvarea problemei, ne interesează cu ce ***viteză minimă*** $v_{min.\ M}$ trebuie să ajungă bila/piatra în punctul **M**, punctul cel mai înalt al acoperişului aflat la înălțimea **a** de sol. Alegând un sistem de axe ortogonale xOy, (cu originea **O** în punctul **M**) și axa Ox orizontală,



putem scrie: $L = v_0 \cos\beta \cdot t$ (**1**), ... **0,25 p**

unde $L = \sqrt{b^2 - (a-c)^2}$, ... **0,25 p**

este distanța dintre bazele trapezului dreptunghic, iar pe axa verticală Oy, avem: $-(a-c) = -h = v_0 \sin\beta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (**2**). Din (**1**) şi (**2**) prin eliminarea timpului t între cele două relații, obținem: $-h = L \cdot tg\beta - \frac{g \cdot L^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2\beta}$ (**3**),… **0,50 p**

de unde rezultă **viteza "*inițială*" a corpului** în punctul **M**:

$$v_M^2 = \frac{g \cdot L^2}{2 \cdot (L \cdot tg\beta + h) \cdot \cos^2\beta} (\mathbf{4}), \Leftrightarrow v_{min.M}^2 = \frac{g \cdot L^2}{(L \cdot \sin 2\beta + h \cdot \cos 2\beta + h)} (\mathbf{5}),$$ .... **1 p**

unde s-a folosit formula trigonometrică a unghiului dublu: $\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$. .... **0,25 p**

Minimul vitezei $v_{min.M}$ se realizează când termenul de la *numitorul fracției* este ***maxim***, adică $D_{max.} = L \cdot \sin 2\beta + h \cdot \cos 2\beta + h$ . ... **0,25 p**

Notăm în continuare $f(\beta) = L \cdot \sin 2\beta + h \cdot \cos 2\beta$, funcția la care ne interesează să-i găsim ***maximul***.

Cum stabilim ***valoarea minimă a vitezei***? Notăm convențional: $\frac{L}{h} = tg\theta$ și transcriem relația de mai sus sub forma:

$f(\beta) = L \cdot \sin 2\beta + h \cdot \cos 2\beta = h \cdot tg\theta \cdot \sin 2\beta + h \cdot \cos 2\beta$ . ... **0,25 p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$f(\beta)=h\cdot(tg\theta\cdot\sin 2\beta+\cos 2\beta)=h\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\sin 2\beta+\cos 2\beta\right)=\frac{h}{\cos\theta}\cdot\cos(2\beta-\theta)$	**1 p**	
Maximul se realizează pentru $\cos(2\beta-\theta)=1$. Aceasta înseamnă $2\beta-\theta=0^0 \Leftrightarrow \theta=2\beta_{max.}$, ceea ce ne dă $tg\theta=tg2\beta_{max.}=L/h$..	**0,25 p**	
$tg^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{L^2}{h^2}\Rightarrow\cos\theta=\frac{h}{\sqrt{L^2+h^2}}$	**0,25 p**	
Valoarea ***vitezei minime*** în punctul **M** este: $v^2_{min.M}=\frac{g\cdot L^2}{(L\cdot\sin 2\beta+h\cdot\cos 2\beta+h)}=\frac{g\cdot L^2}{\sqrt{L^2+h^2}+h}=\frac{g\cdot L^2}{\sqrt{L^2+h^2}+h}\cdot\frac{(\sqrt{L^2+h^2}-h)}{(\sqrt{L^2+h^2}-h)}=$ $=g(\sqrt{L^2+h^2}-h)$. Rezultă: $v_{0min.}=\sqrt{g(\sqrt{L^2+h^2}-h)}$ (6).	**0,50 p**	
Înlocuind: $L=\sqrt{b^2-(a-c)^2}$ și $h=a-c$ în relația (**6**), și prin urmare obținem: $v_{min.\ M}=\sqrt{g[b-(a-c)]}$	**0,25 p**	
Din ***legea conservării energiei mecanice*** obținem ***viteza inițială minimă*** de lansare $v_{0min.}$ din punctul **P**: $\frac{m\cdot v^2_{0min.}}{2}=\frac{m\cdot v^2_{min.M}}{2}+m\cdot g\cdot a$, rezultă: $v_{0min.}=\sqrt{v^2_{min.M}+2ga}=\sqrt{g(a+b+c)}$.	**1 p**	
Problema I.B.		**4 puncte**
Există două câmpuri ce acţionează asupra mărgelei: cel electrostatic şi cel gravitaţional. Fie H şi h distanţele de la sarcina fixă Q, de jos, până la mărgea, în poziţia de sus, respectiv de jos, unde viteza mărgelei se anulează. Conform principiului fundamental al dinamicii/legii II Newton, putem scrie în punctul limită superior **M**, $m\cdot a=m\cdot g-k\frac{Q\cdot q}{H^2}$, ...	**1 p**	
unde prin q şi Q s-a notat sarcina mărgelei şi respectiv sarcinii fixe, iar prin k constanta electrică a mediului în care se găsesc sarcinile electrice.Ca urmare a aceluiaşi principiu fundamental al dinamicii în punctul limită inferior **N**, putem scrie: $m\cdot A=k\frac{Q\cdot q}{h^2}-mg$	**1 p**	
Notând cu $\beta=k\cdot Q\cdot q/m$, avem relaţiile: $a=g-\beta/H^2$ şi respectiv: $A=\beta/h^2-g$. Conservarea energiei totale pentru , în poziţiile extreme (cu $v_{susM}=v_{josN}=0$), se exprimă sub forma $gH+\beta/H=gh+\beta/h$..............	**1 p**	
De aici rezultă $g=\beta/hH$. Din relaţiile iniţiale găsim $g-a=\beta/H^2$, şi astfel $(g-a)(g+A)=g^2$. În consecinţă $A=g\cdot a/(g-a)$..............................	**1 p**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Subiect II - OPTICĂ GEOMETRICĂ — 10 puncte

Problema a II-a. Formarea imaginilor în lentile subtiri (A+B)

Problema II.A. — 4 puncte

Folosind **formula punctelor conjugate** și **mărirea/mărimea liniară transversală** a lentilei optice, putem scrie relațiile $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}$, …………….. **0,50 p** **0,50 p**

$$\beta=\frac{y_2}{y_1}=\frac{x_2}{x_1},$$ ………………………………………………………… **0,75 p**

putem scrie: $x_2^{A'}=\frac{f(f+a\cdot\cos\alpha)}{a\cdot\cos\alpha}$, ………………………………………

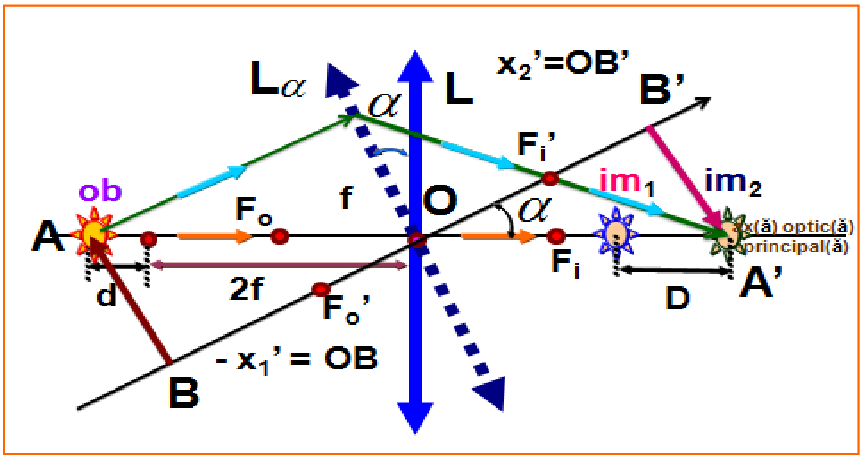
$$y_2^{A'}=\frac{\frac{f(f+a\cdot\cos\alpha)}{a\cdot\cos\alpha}}{f+a\cdot\cos\alpha}\cdot a\cdot\sin\alpha=f\cdot tg\alpha$$ ………………………… **0,75 p**

$$l^2=(x_2^{A'}-f)^2+y_2^{A'2}=\left(\frac{f^2}{a\cdot\cos\alpha}\right)^2+\left(f\cdot\frac{a\cdot\sin\alpha}{a\cdot\cos\alpha}\right)^2=\left(\frac{f}{a\cdot\cos\alpha}\right)^2\left(f^2+a^2\cdot\sin^2\alpha\right)..$$

$$l=\frac{f}{a\cdot\cos\alpha}\sqrt{f^2+a^2\cdot\sin^2\alpha}$$ ………………………………… **1,50 p**

Problema II.B. — 6 puncte

Punctul luminos **B** obiect fiind iniţial la o distanţă $(-x_1=2f+d>0)$ de centrul optic **O** al lentilei , imaginea sa se va forma la distanţa x_2 de centrul optic al lentilei, şi ca urmare a formulei fundamentale a lentilelor subţiri:



1 p

$$x_2=\frac{x_1\cdot f}{x_1+f}=\frac{(-2f-d)\cdot f}{-2f-d+f}=2f-\frac{fd}{f+d}<2f$$ ………………………… **0,50 p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

După rotirea lentilei cu unghiul α în jurul centrului optic **O** (vezi figura!), axul optic principal al lentilei se va roti şi el cu acelaşi unghi α faţă de poziţia iniţială a aceluiaşi ax optic, în acelaşi plan. Facem următoarele notaţii: $OB=-x_1^{'}>0$, $OB'=x_2^{'}$, $OA'=x_2+D$. Distanţa **D** de la ***vechea imagine*** la ***noua imagine*** a punctului obiect **A** , va fi în (**A'**) pe vechiul ax optic principal (vezi formarea noii imagini pe figură!): $D=OA'-x_2$. Mai putem scrie relaţiile în triunghiurile dreptunghice ΔBOA şi $\Delta B'OA'$: $\cos\alpha=\dfrac{-x_1^{'}}{2f+d}=\dfrac{x_2^{'}}{OA'}=\dfrac{x_2^{'}}{x_2+D}$, ……………	**0,75 p**	
de unde : $D=\dfrac{(2f+d)\cdot x_2^{'}}{-x_1^{'}}-x_2$, $x_1^{'}=-(2f+d)\cdot\cos\alpha$. ………………………	**0,75 p**	
Folosind apoi prima formulă fundamentală a lentilelor subţiri pentru noua poziţie (L_α) a lentilei găsim: $x_2^{'}=\dfrac{x_1^{'}\cdot f}{x_1^{'}+f}=\dfrac{(-2f+d)\cdot\cos\alpha\cdot f}{-(2f+d)\cdot\cos\alpha+f}=\dfrac{f(2f+d)}{(2f+d)\cos\alpha-f}+2f-\dfrac{fd}{f+d}$, ………	**1 p**	
iar în final obţinem **distanţa** de la ***vechea imagine*** la ***noua imagine*** a aceluiaşi punct obiect: $D=\dfrac{f(2f+d)^2}{f+d}\cdot\dfrac{(1-\cos\alpha)}{(2f+d)\cos\alpha-f}$ ………………..…………………	**1 p**	
Caz particular : $d=0$, adică iniţial obiectul se află în faţa lentilei, la dublul distanţei focale a lentilei. Rezultă: $D=\dfrac{4f(1-\cos\alpha)}{2\cos\alpha-1}$ …………....…………	**1 p**	
Subiect III - TERMODINAMICĂ		
Problema a III-a. Procese termodinamice generale (A+B+C)		**10 puncte**
Problema III.A.		**2,5 puncte**
Volumul ocupat de toluen la temperatura t_1 este V_1 şi deci: $V_1=V_{10}(1+\beta\cdot t_1)$; analog, $V_2=V_{20}(1+\beta\cdot t_2)$; …………………………..………	**0,50 p**	
Considerăm ca densitatea la temperatura $t_0=0^0C$ este ρ . În acest caz , $m_1=V_{10}\cdot\rho$ şi $m_2=V_{20}\cdot\rho$. ……………………………………………..……...	**0,50 p**	
După amestecarea lichidelor temperatura de echilibru devine: $t=\dfrac{m_1\cdot t_1+m_2\cdot t_2}{m_1+m_2}$. ………………………………………..…….	**0,50 p**	
Volumele la această temperatură t sunt : $(V_{10}(1+\beta\cdot t))$ şi $V_{20}(1+\beta\cdot t)$; Suma volumelor amestecate este: $V_{10}(1+\beta\cdot t)+V_{20}(1+\beta\cdot t)=V_{10}+V_{20}+\beta\cdot t(V_{10}+V_{20})=$		

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$=V_{10}+V_{20}+\beta\cdot\frac{m_1\cdot t_1+m_2\cdot t_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{m_1+m_2}{\rho}=V_{10}+V_{20}+\beta\left(\frac{m_1\cdot t_1}{\rho}+\frac{m_2\cdot t_2}{\rho}\right)=$ $=V_{10}+\beta\cdot V_{10}\cdot t_1+V_{20}+\beta\cdot V_{20}\cdot t_2=V_{10}(1+\beta\cdot t_1)+V_{20}(1+\beta\cdot t_2)=V_1+V_2$ .... Suma volumelor este constantă. În cazul nostru este $410\,\text{cm}^3$. Rezultatul rămâne același indiferent de cantitatea de toluen.	**1 p**	
Problema III.B. Diverse transformări termodinamice		**2,5 puncte**
Căldura cedată de apă și calorimetru de la $t_2=10^oC$ până atinge temperatura $t_0=0^oC$ este: $Q_{12}=(m_1\cdot c_1+m_2\cdot c_2)\cdot(t_2-t_0)=4{,}56\cdot10^4\,J$.	**0,25 p**	
Căldura necesară pentru a aduce întreaga cantitate de gheață la temperatura $t_0=0^oC$ este: $Q_{pg}=m_3\cdot c_3\cdot(t_0-t_3)=4{,}18\cdot10^4\,J$	**0,25 p**	
Căldura necesară topirii întregii cantități de gheață este: $Q_{tg}=m_3\cdot\lambda_g=67\cdot10^4$ J $Q_{12}-Q_{pg}=0{,}38\cdot10^4\,J$.	**0,25 p**	
Căldura rămasă nu este suficientă pentru topirea întregii cantități de gheață. Deci temperatura de echilibru se va stabili la $t_0=0^oC$	**0,25 p**	
Ecuația calorimetrică în acest caz o putem scrie: $(m_1\cdot c_1+m_2\cdot c_2)\cdot(t_2-t_0)=m_3\cdot c_3\cdot(t_3-t_0)+x\cdot\lambda$.	**0,50 p**	
Cantitatea de gheață care se topește este: $x=\frac{(m_1\cdot c_1+m_2\cdot c_2)\cdot(t_2-t_0)-m_3\cdot c_3\cdot(t_3-t_0)}{\lambda}=11{,}34\,\text{grame}$	**0,50 p**	
Deci în calorimetru o să avem: $m_{apă}=m+x=1\,\text{kg}+0{,}01134\,\text{kg}=1{,}01134\,\text{kg}$.	**0,25 p**	
și masa de gheață rămasă: $m_{gheată}=m-x==2\,\text{kg}-0{,}01134\,\text{kg}=1{,}98866\,\text{kg}$	**0,25 p**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Problema III.C. Diverse transformări termodinamice		5 puncte
a.) Transformare politropă : $p \cdot V^{-1} = const.$, rezultă indicele/exponentul politropic: $n = -1$;	**0,50 p**	
Căldura molară în acest proces este: $C_{12} = C_V - \frac{R}{n-1} = \frac{3}{2}R + \frac{R}{2} = 2R$..........	**0,50 p**	
Căldura absorbită în acest proces va fi: $Q_{12} = 2\nu \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$.	**0,50 p**	
b.) **b.1.** Reprezentarea corectă a celor două transformări :	**1 p** (**0,50 p** + **0,50 p**)	
b.2. $Q_{absorbit} = \nu \cdot C_p \cdot (T_2 - T_1) + \nu \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$;..	**0,50 p**	
$Q_{cedat} = \nu \cdot C_p \cdot (T_1 - T_2) + \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_4}\right)$;..	**0,50 p**	
Randamentul mașinii termice / ciclului motor va fi: $\eta_{motor} = \frac{T_2 - T_1}{T_2 + \frac{C_p}{R} \cdot \frac{(T_2 - T_1)}{\ln(V_4/V_1)}} = \frac{1}{\frac{T_2}{T_2 - T_1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{1}{\ln \varepsilon}} = \frac{1}{\frac{\rho}{\rho - 1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{1}{\ln \varepsilon}}$	**1 p**	
b.3. $\eta_{Carnot} = \frac{(T_2 - T_1)}{T_2}$. . $\eta_{Carnot} = 50\% > \eta_{motor} \approx 22\%$....	**0,50 p**	

Barem propus de:

prof. **TOMA** Ion, Colegiul Național ”*Mihai Viteazul*”, București;
prof. **ANTONIE** Dumitru, Colegiul Tehnic nr.2,Târgu – Jiu;
prof. **ANGHEL** Marian Viorel, Liceul Teoretic ”*Petre Pandrea*”, Balș.

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.