Subiectul I: (10 puncte)

Circuite curent alternativ

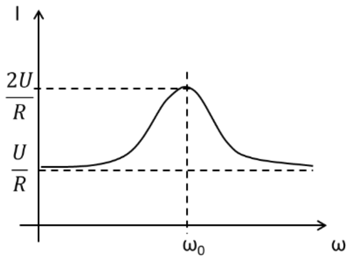
Rezolvare:

a. Impedanța circuitului este dată de relația $\bar{Z} = \frac{R[R+j(X_L-X_C)]}{2R+j(X_L-X_C)} = R\frac{2R^2+(X_L-X_C)^2}{4R^2+(X_L-X_C)^2} + jR^2\frac{X_L-X_C}{4R^2+(X_L-X_C)^2}$ (1p)

La rezonanță $Im\,\bar{Z} = 0$, adică $(X_L - X_C) = 0$ și de aici obținem $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 200\ rad/s$. (0,5p)

b. La frecvențe foarte mici, $\omega \to 0$, $X_C \to \infty$, $(Z_{max} = R)$ și condensatorul împiedică trecerea curentului prin ramura LC, deci curentul va trece doar prin rezistor, valoarea efectivă fiind $I_{min} = \frac{U}{R} = 0{,}4A$. (0,3p)

La frecvențe foarte mari, $\omega \to \infty$, $X_L \to \infty$, $(Z_{max} = R)$ și bobina împiedică trecerea curentului prin ramura LC, deci curentul va trece doar prin rezistor, $I_{min} = \frac{U}{R} = 0{,}4A$. (0,3p)



La frecvența de rezonanță $X_L = X_C$, $(Z_{min} = \frac{R}{2})$, iar curenții din cele două ramuri sunt egali $I_1 = I_2 = \frac{U}{R}$, deci curentul total va avea valoarea efectivă $I_0 = I_{max} = \frac{U}{Z_{min}} = I_1 + I_2 = 2\frac{U}{R} = 0{,}8A$ (0,4p)

Reprezentare grafică (0,5p)

c. Banda de trecere a circuitului reprezintă intervalul de frecvențe pentru care $I \geq \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$, adică $Z \leq \sqrt{2} \cdot Z_{min}$.

Din ecuația $Z = \sqrt{2} \cdot Z_{min}$, se obține după calcule relația $(X_L - X_C)^2 = 2R^2$.

De aici se găsesc pulsațiile $\omega_1 = \frac{-\sqrt{2}RC+\sqrt{2R^2C^2+4LC}}{2LC}$ și $\omega_2 = \frac{\sqrt{2}RC+\sqrt{2R^2C^2+4LC}}{2LC}$.

Se observă cu ușurință că $\omega_2 \cdot \omega_1 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$, respectiv $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R\sqrt{2}}{L}$.

Din $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ și $\omega_2 \cdot \omega_1 = \omega_0^2$ rezultă $\nu_1 = 4{,}4$ Hz și $\nu_2 = 229{,}4$ Hz (1p)

d. Afirmația de la i. implică faptul că circuitul conține un condensator în serie cu altceva, condensator care nu se află în paralel cu niciun alt element al circuitului. (0,5p)

Pe măsură ce condensatorul se încarcă scade intensitatea curentului de încărcare și circuitul are o rezistență electrică din ce în ce mai mare. Un element R legat în paralel cu C ar limita rezistența la o valoare finită , iar o bobină ideală legată în paralel cu C ar conduce la rezistență nulă. (0,5p)

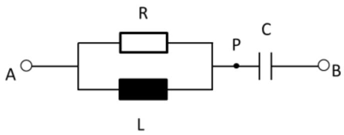
Afirmația de la ii. implică faptul că circuitul conține un condensator și o bobină (ideală cf. enunțului). Numai o combinație LC poate conduce la un defazaj nul. (0,5p)

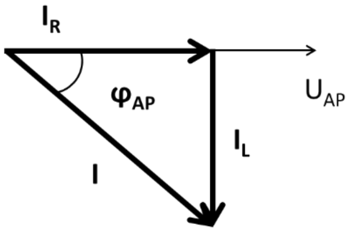
Afirmația de la iii. implică faptul că circuitul conține și un rezistor R, în caz contrar defazajul ar fi, cu excepția rezonanței, π/2. (0,5p)

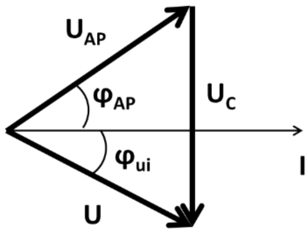
Afirmația de la iv. implică faptul că circuitul conține o grupare paralel RL în serie cu C. La frecvențe mari $X_C \to 0$, $X_L \to \infty$, iar impedanța circuitului $Z_\infty \to R$, intensitatea curentului prin circuit tinzând spre o valoare constantă $I_\infty = \frac{U}{Z_\infty}$. (0,5p)

În concluzie, circuitul este format dintr-o grupare paralel RL înseriată cu un condensator C. (0,5p)

e. Diagramele fazoriale pentru porțiunea AP (paralel L,R) și pentru întreg circuitul sunt ilustrate în figurile de mai jos. (1p)







f. $\overline{Z} = \frac{R X_L^2}{R^2+X_L^2} + j\left(\frac{R^2 X_L}{R^2+X_L^2} - X_C\right)$, respectiv $Z = \sqrt{\left(\frac{R X_L^2}{R^2+X_L^2}\right)^2 + \left(\frac{R^2 X_L}{R^2+X_L^2} - X_C\right)^2}$ (0,5p),

$\lim\limits_{\omega\to\infty} Z = R$, deci $I_S = \frac{U}{R}$ și $R = 1\text{k}\Omega$ (0,5p)

Din $Im\,\overline{Z} = 0$ rezultă $\omega_0 = \frac{R}{\sqrt{L\left(R^2C-L\right)}}$ și apoi $Z_0 = \frac{L}{RC}$.

Cunoscând că $I_0 = \frac{U}{Z_0}$ rezultă în final că $L = 2\text{H}$ (0,5p) și $C = 4\mu\text{F}$. (0,5p)

Subiectul II: (10 puncte)

a. $E_0 = m_e c^2 \cong 9{,}1 * 10^{-31}\text{kg} * \left(3 * 10^8 \frac{m}{s}\right)^2 = 8{,}19 * 10^{-14}\text{J} \cong 511875\ \text{eV} \cong 0{,}5\ M\text{eV}$

$\varepsilon_i = h\nu_i = 6{,}6 * 10^{-34} Js * 160{,}4 * 10^9 s^{-1} \cong 1{,}06 * 10^{-22} J \cong 6{,}6 * 10^{-4} eV$

$\varepsilon_i \ll E_0$

(1 punct)

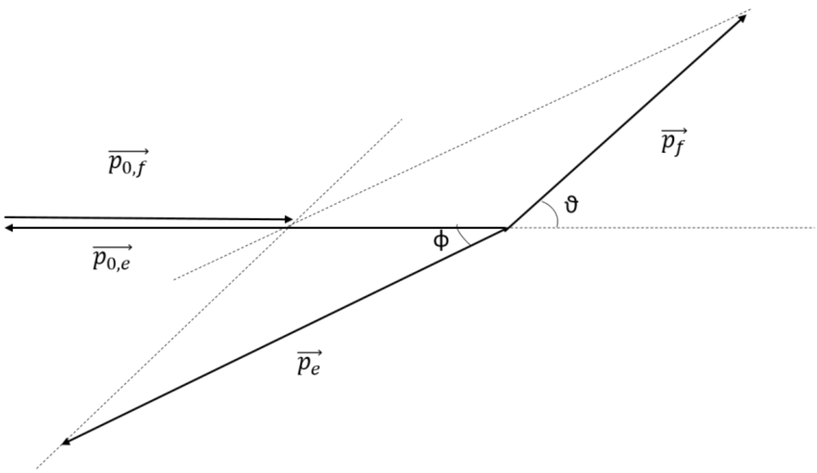
b. $E_i^2 = (p_{0,e}c)^2 + E_0^2$

$E_f^2 = (p_e c)^2 + E_0^2$

$h\upsilon_i + E_i = h\upsilon_f + E_f$

(1 punct)

c. $\overrightarrow{p_{0,e}} + \overrightarrow{p_{0,f}} = \overrightarrow{p_e} + \overrightarrow{p_f}$



(2 puncte)

d. $\nu_f = \frac{E_i + p_{0,e}c}{h\nu_i + E_i + (p_{0,e}c - h\nu_i)cos\vartheta}\nu_i$

(3 puncte)

e. $\varepsilon_f = \frac{\gamma E_0 + \sqrt{\gamma^2 - 1}E_0}{\gamma E_0 + \varepsilon_i + \left(\sqrt{\gamma^2-1}E_0 - \varepsilon_i\right)cos\vartheta}\varepsilon_i$

(1 punct)

f. $\varepsilon_f \cong \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2-1}}\varepsilon_i$

(1 punct)

g. $\lambda_f \cong \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma + \sqrt{\gamma^2-1}}\lambda_i$

$\lambda_f \cong 7{,}6 * 10^{-9}$ m, deci este un foton din domeniul radiațiilor X.

(0,5 puncte)

h. Se obține relația $\Delta\lambda = 2\frac{h}{m_e c}sin^2\frac{\vartheta}{2}$, care reprezintă variație lungimii de undă în cazul efectului Compton normal.

(0,5 puncte)

Subiectul III: (10 puncte)

Fotonul, racheta fotonică și viteza relativă relativistă

a) Din enunțul problemei, știind că:

$$\vec{v}' = v'_{y}\,\vec{j}' = v'\,\vec{j}',$$

rezultă că:

$$v'_{x'} = 0;\ v'_{z'} = 0;\ v_x = 0;\ v_z = 0;$$

$$\vec{v} = v_y\,\vec{j} = v\,\vec{j};$$

și în acord cu regula de compunere relativistă a vitezelor, obținem:

$$v_y = \frac{v'_{y'} + v_0}{1 + \frac{v_0 v'_{y'}}{c^2}};$$

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v_0 v'}{c^2}}, \qquad (1{,}5\ \text{p})$$

reprezentând regula relativistă de compunere a vitezelor colineare, diferită de regula clasică;

$$v' = c;$$

$$v = \frac{c + v_0}{1 + \frac{c v_0}{c^2}} = \frac{c + v_0}{c^2 + c v_0}\,c^2 = \frac{c + v_0}{c(c + v_0)}\,c^2;$$

$$v = c, \qquad (1{,}5\ \text{p})$$

rezultat în acord cu principiul constantei vitezei luminii în raport cu orice SRI.

b)

$$v' = c;\ v_0 = c;$$

$$v = \frac{c + c}{1 + \frac{cc}{c^2}} = c, \quad (2\ \text{p})$$

rezultat în acord cu principiile TRR, confirmând că viteza luminii în vid este o viteză limită maximă, care nu numai că nu poate fi depășită, dar ea nu poate fi nici cel puțin atinsă de un corp substanțial obișnuit printr-un proces de accelerare dinamică.

c) Din enunțul problemei, în acord cu notațiile existente în desenul din figura 1, rezultă:

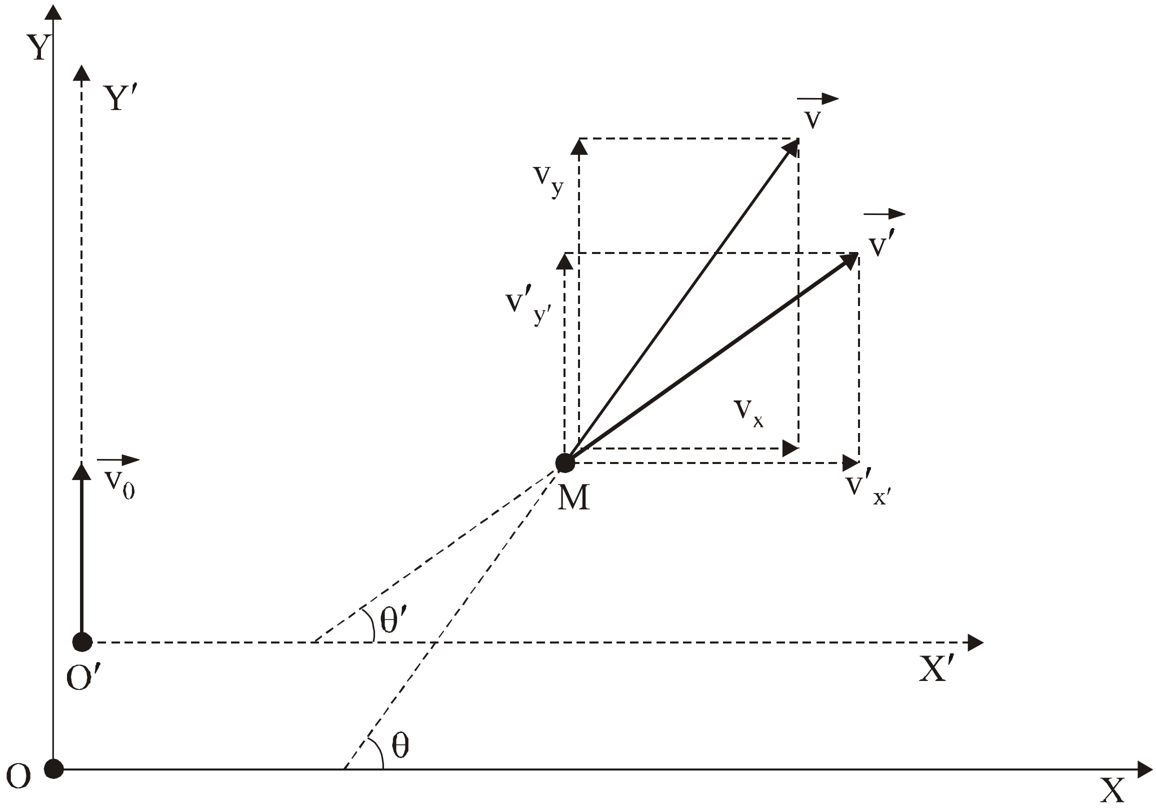


Fig. 1

$$\vec{v}' = v'_{x'}\vec{i}' + v'_{y'}\vec{j}';$$

$$v'_{z'} = 0;\ \ v_z = 0;$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j};$$

$$v_x = v\cos\theta;\ v_y = v\sin\theta;$$

$$v'_{x'} = v'\cos\theta';\ v'_{y'} = v'\sin\theta';$$

$$v\cos\theta = \frac{v'\cos\theta'}{1+\frac{v_0 v'\sin\theta'}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}};$$

$$v\sin\theta = \frac{v'\sin\theta' + v_0}{1+\frac{v_0 v'\sin\theta'}{c^2}};$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{v'\sin\theta' + v_0}{v'\cos\theta'\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}};\quad v' = c;$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{c\sin\theta' + v_0}{\cos\theta'\sqrt{c^2 - v_0^2}};$$ (1 p)

1)

$$\theta' = 0;\ \text{tg}\,\theta = \frac{v_0}{\sqrt{c^2 - v_0^2}};\ \theta > 0;$$ (0,5p)

2)

$$\theta' = 90^0;\ \text{tg}\,\theta = \frac{c\sin\theta' + v_0}{\cos\theta'\sqrt{c^2 - v_0^2}};$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{c + \mathrm{v}_0}{0 \cdot \sqrt{c^2 - \mathrm{v}_0^2}} \to \infty;\ \theta = 90^0 = \theta'.\ (0{,}5\text{p})$$

d) Utilizând relația din enunțul problemei, scrisă pentru cei doi fotoni, rezultă:

$$\mathrm{v}_{21,\text{relativist}} = \frac{\sqrt{(\vec{\mathrm{v}}_2 - \vec{\mathrm{v}}_1)^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{\mathrm{v}}_2 \text{ x } \vec{\mathrm{v}}_1)^2}}{1 - \frac{\vec{\mathrm{v}}_1 \cdot \vec{\mathrm{v}}_2}{c^2}};$$

$$(\vec{\mathrm{v}}_2 - \vec{\mathrm{v}}_1)^2 = (\vec{\mathrm{v}}_2 - \vec{\mathrm{v}}_1)\cdot(\vec{\mathrm{v}}_2 - \vec{\mathrm{v}}_1) = |\vec{\mathrm{v}}_2 - \vec{\mathrm{v}}_1|^2 \cdot \cos 0^0 = |\vec{\mathrm{v}}_2 - \vec{\mathrm{v}}_1|^2;$$

$$(\vec{\mathrm{v}}_2 - \vec{\mathrm{v}}_1)^2 = \mathrm{v}_2^2 + \mathrm{v}_1^2 - 2\,\mathrm{v}_2\mathrm{v}_1 \cos\alpha;$$

$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 = c;\ \ (\vec{\mathrm{v}}_2 - \vec{\mathrm{v}}_1)^2 = 2c^2(1 - \cos\alpha);$$

$$(\vec{\mathrm{v}}_2 \text{ x } \vec{\mathrm{v}}_1)^2 = |\vec{\mathrm{v}}_2 \text{ x } \vec{\mathrm{v}}_1|^2 = (\mathrm{v}_2\mathrm{v}_1 \sin\alpha)^2;$$

$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 = c;\ (\vec{\mathrm{v}}_2 \text{ x } \vec{\mathrm{v}}_1)^2 = c^4 \sin^2\alpha;$$

$$\vec{\mathrm{v}}_1 \cdot \vec{\mathrm{v}}_2 = \mathrm{v}_1\mathrm{v}_2 \cos\alpha;$$

$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 = c;\ \ \vec{\mathrm{v}}_1 \cdot \vec{\mathrm{v}}_2 = c^2 \cos\alpha;$$

$$\mathrm{v}_{21,\text{relativist}} = \frac{\sqrt{2c^2(1 - \cos\alpha) - \frac{1}{c^2} c^4 \sin^2\alpha}}{1 - \frac{c^2 \cos\alpha}{c^2}};$$

$$\mathrm{v}_{21,\text{relativist}} = \frac{\sqrt{2c^2(1 - \cos\alpha) - c^2 \sin^2\alpha}}{1 - \cos\alpha};$$

$$\mathrm{v}_{21,\text{relativist}} = \frac{\sqrt{c^2 + c^2 - 2c^2 \cos\alpha - c^2 \sin^2\alpha}}{1 - \cos\alpha};$$

$$\mathrm{v}_{21,\text{relativist}} = \frac{\sqrt{c^2 + c^2(1 - \sin^2\alpha) - 2c^2 \cos\alpha}}{1 - \cos\alpha};$$

$$\mathrm{v}_{21,\text{relativist}} = \frac{\sqrt{c^2 + c^2 \cos^2\alpha - 2c^2 \cos\alpha}}{1 - \cos\alpha};$$

$$\mathrm{v}_{21,\text{relativist}} = c \cdot \frac{\sqrt{1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha}}{1 - \cos\alpha};$$

$$\mathrm{v}_{21,\text{relativist}} = c \cdot \frac{\sqrt{(1 - \cos\alpha)^2}}{1 - \cos\alpha};$$

$$\mathrm{v}_{21,\text{relativist}} = c,\ \ (3\text{p})$$

rezultat în acord cu principiul constanței vitezei luminii.

Subiecte propuse de:
prof. Florin BUTUȘINĂ – Colegiul Național ”Simion Bărnuțiu”, *Şimleu-Silvaniei*
prof. Constantin GAVRILĂ – Colegiul Național ”Sfântul Sava”, *București*
prof. dr. Mihail SANDU – Liceul Tehnologic de Turism, *Călimănești*
prof. Viorel SOLSCHI, *Colegiul Național „Mihai Eminescu” – Satu Mare*